Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (84), 2014

УДК 517.984.5

Оператор иррационального поворота, спектр которого является кольцом[1]

А.Н. Глаз

Расматриваются операторы взвешенного сдвига, порожденные иррациональным поворотом окружности. Целью работы является выяснение того, какой вид может иметь спектр рассматриваемых операторов. В исследованных ранее примерах оказывалось, что спектр является окружностью. Основным результатом работы является явно построенный пример оператора со спектром в виде кольца.
Ключевые слова: оператор взвешенного сдвига, спектр оператора.

Weigted shift operators genearted by rotation of the circle are concidered. The question under consideration is to clarify what kind of considered operators spectrum can be. In previously studied examples it is turned out that the spectrum is a circle. The main result is an explicitly constructed example of operator with spectrum in the form of a ring.
Keywords: weighted shift operator, operator spectrum.

Введение. В работе рассматривается оператор взвешенного сдвига (ОВС) иррационального поворота, то есть оператор

$$B(u)(x) = a(x)u(\beta(x)), \tag{1}$$

в пространстве $L_2(\mathsf{S}^1)$ на окружности $\mathsf{S}^1 = \mathsf{R} \bmod 1$, где $\beta(x) = x + h$, h – иррациональное число и $a \in L_\infty(\mathsf{S}^1)$ – заданная функция. Оператор (1) можно записать в виде $B = aT_\beta$, где T_β – оператор сдвига, действующий по формуле $T_\beta(u)(x) = u(\beta(x))$, а символом a обозначается оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathsf{S}^1)$.

Ниже предполагается, что коэффициент $a \in L_\infty(\mathsf{S}^1)$ отделен от нуля, то есть выполнено условие $\operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathsf{S}^1} |a(x)| > 0$.

Целью работы является выяснение того, какой вид может иметь спектр рассматриваемых операторов. Известно [1, с. 47], что при любом $a \in L_\infty(\mathsf{S}^1)$ спектр оператора (1) инвариантен относительно вращений вокруг точки 0, то есть состоит из некоторого набора окружностей. В исследованных ранее примерах оказывалось, что спектр является окружностью. В работе показано, что спектр такого оператора является либо кольцом, либо окружностью. Основным результатом является явно построенный пример, в котором спектр оператора является именно кольцом. Ранее такие примеры в явном виде не были известны.

Рассмотрим вспомогательную теорему.

Теорема 1. *Для любого коэффициента* $a \subset L_\infty(\mathsf{S}^1)$ *спектр оператора* (1) *может быть множеством только следующего вида: окружностью, кольцом либо кругом. Если* a *отделен от нуля, то спектр является либо окружностью, либо кольцом.*

Доказательство. Покажем сначала, что спектр рассматриваемого оператора B с произвольным коэффициентом из $L_\infty(\mathsf{S}^1)$ связен. Если это не так, то в силу инвариантности спектра относительно вращения существует окружность $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \lambda_0\}$ такая, что спектр оператора не пересекается с этой окружностью и разбивается ею на два подмножества. Тогда определен проектор Рисса, заданный формулой

---

[1] Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13М-036)

$$Pu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=\lambda_0} (B - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Согласно [1, с. 111–112], [2, с. 111], оператор Рисса, задающий соответствующее разложение спектра, является оператором умножения на функциию из $L_\infty(\mathbb{S}^1)$ и перестановочен с оператором B.

Условие перестановочности приводит к тому, что $P(x) = P(x+h)$ почти всюду. А из эргодичности иррационального поворота относительно меры Лебега [3, с. 82] следует, что $P(x) = C$ почти всюду. Так как $P(x)^2 = P(x)$, получаем, что проектор тривиален: либо $P = 0$, либо $P = I$. Следовательно, спектр рассматриваемого оператора связен. Таким образом, спектр связен, ограничен и инвериантен относительно вращения, следовательно, является окружностью, кольцом либо кругом.

Если коэффициент отделен от нуля, то оператор B обратим и обратный к нему оператор имеет вид

$$B^{-1}u(x) = \frac{1}{a(\beta^{-1}(x))} u(\beta^{-1}(x)).$$

В этом случае спектр не может быть кругом. Теорема доказана.

Напомним, что *средним геометрическим* ограниченной измеримой функции a на X по отношению к нормированной мере ν называется число

$$S_\nu(a) = \exp[\int_X \ln|a(x)|\, d\nu].$$

Среднее геометрическое a по мере Лебега на $\mathbb{S}^1$ будем обозначать $S(a)$.

Известно [1, с. 45], что для непрерывных коэффициентов a спектр оператора (1) является окружностью радиуса $S(a)$. Это верно также для функций a, множество точек разрыва которых имеет меру 0. То есть если a интегрируема по Риману, то спектр также является окружностью радиуса $S(a)$.

Более того, существует достаточно много функций, неинтегрируемых по Риману, таких, что спектр ОВС с таким коэффициентом остается окружностью. Например, рассмотрим функции a, представимые в виде

$$a(x) = s(x)d(x)\frac{1}{s(x+h)}, \tag{2}$$

где $d \in C(X)$, $s \in L_\infty(X)$ и s отделен от нуля. Тогда оператор с коэффициентом a подобен оператору B_0 с коэффициентом d. Так как спектр оператора B_0 является окружностью, значит, таким же будет и спектр оператора с коэффициентом (2).

В работе [4] было показано, что для произвольного коэффициента $a \in L_\infty$ окружность радиуса $S(a)$ принадлежит спектру оператора (1).

Перейдем к построению примера.

Рассмотрим двустороннюю траекторию точки ноль при действии отображения β, то есть множество точек $\{\beta^j(0) = hj, j \in \mathbb{Z}\} \subset X$. Рассмотрим набор окрестностей

$$J_j := (hj - \delta_j, hj + \delta_j), \tag{3}$$

где $\delta_j > 0$ такие, что $2\sum_j \delta_j < 1$, и обозначим

$$M_0 := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} J_j.$$

Тогда для $p := \mu(M_0)$ меры Лебега μ множества множества M_0 выполнено $0 < p < 1$.

Положим

$$a_0(x) := \begin{cases} \xi_1, & x \in M_0, \\ \xi_2, & x \in \mathbb{S}^1 \setminus M_0 \end{cases} = \xi_1 \chi_{M_0} + \xi_2 \chi_{\mathbb{S}^1 \setminus M_0}, \tag{4}$$

где χ_K – характеристическая функция некоторого подмножества $K \subset \mathrm{S}^1$, то есть функция вида

$$\chi_{M_0}(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \in \mathrm{S}^1 \setminus K. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть* $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{R}$ *и* $\xi_1 > \xi_2 > 0$. *Спектр оператора взвешенного сдвига* (1) *с коэффициентом* a_0 *является кольцом*

$$\sigma(B) = \left\{ \lambda \in \mathrm{C} : \xi_1^p \xi_2^{1-p} \le |\lambda| \le \xi_1 \right\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$M_k := \beta^{-k}(M_0)$$

и заметим, что

$$\chi_{M_0}(\beta^k(x)) = \begin{cases} 1, & \beta^k(x) \in M_0, \\ 0, & \beta^k(x) \in \mathrm{S}^1 \setminus M_0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in \beta^{-k}(M_0), \\ 0, & x \in \beta^{-k}(\mathrm{S}^1 \setminus M_0) \end{cases} = \chi_{\beta^{-k}(M_0)}(x).$$

Рассмотрим функции

$$\bar{a}_n(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} |a_0(\beta^k(x))| \right)^{\frac{1}{n}}, n \in \mathrm{N}.$$

Поскольку $\xi_2 \le a_0(\beta^k(x)) \le \xi_1, \forall x \in \mathrm{S}^1$ и $a_0(\beta^k(x)) = \xi_1, \forall x \in M_k$, то

$$\xi_2 \le \bar{a}_n(x) \le \xi_1, \forall x \in \mathrm{S}^1$$

и

$$\bar{a}_n(x) = \xi_1, \forall x \in \bigcap_{k=0}^{n-1} M_k.$$

Заметим, что множества $\bigcap_{k=0}^{n-1} M_k$ имеют ненулевую меру как непустое пересечение конечного числа открытых множеств ненулевой меры. Следовательно,

$$\max_{x \in \mathrm{S}^1} \bar{a}_n(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathrm{S}^1} \bar{a}_n(x) = \xi_1.$$

Для произвольного оператора верна формула спектрального радиуса

$$R(B) = \lim_{n \to +\infty} (\|B^n\|)^{\frac{1}{n}}.$$

Поскольку норма оператора взвешенного сдвига равна норме коэффициента в $L_\infty(\mathrm{S}^1)$ [1, с. 33], то для оператора $B^n(u)(x) = (\bar{a}_n(x))^n u(\beta^n(x))$ верно $\|B^n\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathrm{S}^1} |(\bar{a}_n(x))^n|$. Тогда

$$R(B) = \lim_{n \to +\infty} (\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathrm{S}^1} \bar{a}_n(x)) = \xi_1.$$

Поскольку a отделим от нуля, то оператор B обратим, а значит, $r(B) = \dfrac{1}{R(B^{-1})}$. Так как

$$(B^{-1})^n u(x) = \frac{1}{(\bar{a}_{-n}(x))^n} u(\beta^{-n}(x)),$$

где

$$\bar{a}_{-n}(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} |a_0(\beta^{-k}(x))| \right)^{\frac{1}{n}}, n \in \mathrm{N},$$

то

$$r(B) = \frac{1}{R(B^{-1})} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} (\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathrm{S}^1} (\bar{a}_{-n})^{-1})} = \lim_{n \to +\infty} (\operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathrm{S}^1} \bar{a}_{-n}).$$

Вычислим среднее геометрическое по мере Лебега коэффициента a_0, заданного формулой (4):

$$S(a_0) = \exp\left(\int_{\mathrm{S}^1} \ln|a_0(\beta(x))|\,dx\right) = \exp\left(\int_{M_0} \ln(\xi_1)dx + \int_{\mathrm{S}^1\setminus M_0} \ln(\xi_2)dx\right) =$$

$$= \exp(p\ln(\xi_1) + (1-p)\ln(\xi_2)) = \xi_1^p \xi_2^{1-p},$$

где $p = \mu(M_0)$.

Докажем, что

$$\theta := \lim_{n\to+\infty} (\operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathrm{S}^1} \bar{a}_{-n}) = S(a_0). \quad (5)$$

Рассмотрим вспомогательные функции

$$f^{(m)}(x) := \xi_1\chi_{M_0^{(m)}} + \xi_2\chi_{\mathrm{S}^1\setminus M_0^{(m)}},$$

где $M_0^{(m)} := \bigcup_{j=-m}^{m} J_j$, а J_j – множества (3). Аналогично, как для $S(a)$, можно получить, что

$$S(f^{(m)}) = \xi_1^{p_m} \xi_2^{1-p_m},$$

где $p_m = \mu(M_k^{(m)})$. Поскольку $\bigcup_{m\in\mathrm{N}} M_0^{(m)} = M_0$ и $M_0^{(m)} \subset M_0^{(m+1)}$, то по непрерывности меры Лебега

$$\lim_{m\to\infty} p_m = \lim_{m\to\infty} \mu(M_0^{(m)}) = \mu(M_0) = p.$$

А значит,

$$\lim_{m\to\infty} S(f^{(m)}) = S(a_0). \quad (6)$$

По существу, в доказательстве равенства (6) проверена возможность предельного перехода под знаком интеграла Лебега.

Поскольку $f^{(m)}$ – кусочно-постоянные, то они интегрируемы по Риману и, следовательно,

$$\left(\prod_{k=0}^{n-1} f^{(m)}(\beta^k(x))\right)^{\frac{1}{n}} \Gamma\ S(f^{(m)}), n\to+\infty. \quad (7)$$

Из $\xi_1 > \xi_2$ следует, что $a_0(x) \ge f^{(m)}(x), \forall x\in\mathrm{S}^1$. Поэтому

$$\bar{a}_{-n}(x) \ge \left(\prod_{k=1}^{n} f^{(m)}(\beta^{-k}(x))\right)^{\frac{1}{n}}, \forall x\in\mathrm{S}^1. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N_{\varepsilon,1}\in\mathrm{N}: \forall n\ge N_{\varepsilon,1}$ выполнено $\bar{a}_{-n}(x) > S(f^{(m)}) - \varepsilon,\ \forall x\in X,\ \forall m\in\square$. Из (6) следует, что $\exists N_{\varepsilon,2}\in\mathrm{N}$ такое, что $\forall m\ge N_{\varepsilon,2}$ выполнено $S(f^m) \ge S(a_0) - \varepsilon$. Таким образом, получаем, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N_{\varepsilon,1}\in\mathrm{N}:\ \forall n\ge N_{\varepsilon,1}$ выполнено $\bar{a}_{-n}(x) > S(a_0) - 2\varepsilon,\ \forall x\in\mathrm{S}^1$, следовательно, $\inf_{x\in\mathrm{S}^1} \bar{a}_{-n}(x) \ge S(a_0) - 2\varepsilon$. В частности,

$$\theta_n := \operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathrm{S}^1} \bar{a}_{-n}(x) \ge S(a_0) - 2\varepsilon. \quad (9)$$

Поскольку $\theta = \lim_{n\to+\infty} \theta_n$, то из (9)

$$\theta \ge S(a_0). \quad (10)$$

Предположим, что равенство (5) не верное, то есть с учетом (10) выполнено условие $\theta > S(a_0)$.

Положим $\varepsilon_0 = \dfrac{\theta - S(a_0)}{2} > 0$. Так как $\theta = \lim_{n\to+\infty}\theta_n$, то $\exists N_{\varepsilon_0} : \forall n > N_{\varepsilon_0}$ верно $\theta_n > \theta - \varepsilon_0$. Тогда из (9) следует, что

$$\mu\left(\{x \in X : \overline{a}_{-n}(x) < \theta - \varepsilon_0\}\right) = 0, \forall n > N_{\varepsilon_0}.$$

Следовательно,

$$\mu\left(W := \bigcup_{n > N_{\varepsilon_0}} \{x \in X : \overline{a}_{-n}(x) < \theta - \varepsilon_0\}\right) = 0.$$

Тогда $\mu(\mathbb{S}^1 \setminus W) = 1$ и $\forall n > N_{\varepsilon_0}$ выполнено $\overline{a}_{-n}(x) \geq \theta - \varepsilon_0 = S(a_0) + \varepsilon_0$. Из теоремы Биркгофа-Хинчина [3, с. 17] следует, что почти всюду по мере Лебега существует предел при $n \to +\infty$ функций $\overline{a}_{-n}$ и

$$\overline{a}(x) := \lim_{n\to+\infty} \overline{a}_{-n}(x) = S(a), a.e.\ x \in \mathbb{S}^1.$$

А значит, почти для всех $x \in \mathbb{S}^1$ выполнено

$$\overline{a}(x) = \lim_{n\to+\infty} \overline{a}_{-n}(x) \geq S(a_0) + \varepsilon_0 > S(a_0),$$

что противоречит (10). Следовательно, $\theta = S(a_0)$.

По теореме 1 спектр является кольцом, внутренним радиусом которого является $S(a_0) = \xi_1^p \xi_2^{1-p}$, а внешний равен ξ_1. Теорема доказана.

Заметим, доказательство теоремы можно упростить. Для доказательства, что из (10) следует $\theta = S(a_0)$, можно было воспользоваться утверждением, что окружность радиуса $S(a_0)$ лежит в спектре.

В случае, когда $\xi_1 \leq \xi_2$, можно применить доказанную теорему к обратному оператору и получим следующее следствие.

Следствие. *Пусть* $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ *и* $\xi_1 > 0, \xi_2 > 0$. *Спектр оператора взвешенного сдвига с коэффициентом* a_0 *является кольцом*

$$\sigma(B) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \min\{\xi_1; \xi_1^p \xi_2^{1-p}\} \leq |\lambda| \leq \max\{\xi_1; \xi_1^p \xi_2^{1-p}\}\right\}.$$

На этот пример можно посмотреть с более общей точки зрения ([1]). Приведем необходимые определения.

Алгебра A в $L_\infty(X)$ называется *инвариантной относительно отображения* $\beta : X \to X$, если

$$\forall a \in \mathsf{A} \Rightarrow a \circ \beta^{-1} \in \mathsf{A}.$$

Пусть A есть некоторая C^*-подалгебра в $L_\infty(X)$, инвариантная относительно β, $Sp(\mathsf{A})$ – ее пространство максимальных идеалов, которое является компактным топологическим пространством. Согласно теореме Гельфанда-Наймарка, преобразование Гельфанда $\mathsf{A} \ni a \to \hat{a} \in C(Sp(\mathsf{A}))$ задает изоморфизм алгебры A с алгеброй $C(Sp(\mathsf{A}))$ непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов. Отображение β порождает непрерывное отображение $\beta : Sp(\mathsf{A}) \to Sp(\mathsf{A})$. Если, кроме того, алгебра A инвариантна относительно β^{-1}, то β является гомеоморфизмом.

Через $\Lambda_\beta(X)$ обозначим множество всех борелевских нормированных мер на X, инвариантных и эргодических относительно β.

Напомним, что мера ν называется *инвариантной относительно отображения* $\beta : X \to X$, если для каждого измеримого подмножества $\omega \subset X$ выполнено равенство

$$\nu(\beta^{-1}(\omega)) = \nu(\omega).$$

Если из того, что $\nu(\beta^{-1}(\omega)\Delta\omega) = 0$, следует, что либо $\nu(\omega) = 0$, либо $\nu(X \setminus \omega) = 0$, то мера ν называется *эргодической относительно отображения* $\beta : X \to X$, а отображение β *– эргодическим относительно меры* ν.

Если $\nu(X) = 1$, то мера μ называется *нормированной*, или *вероятностной* на X.

Если пространство $Sp(\mathcal{A})$ является связным и коэффициент оператора (1) отделен от нуля, то спектр оператора имеет вид

$$\sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r(B) \le |\lambda| \le R(B)\},$$

где

$$R(B) = \max_{\nu \in \Lambda_{\tilde{\beta}}(Sp(\mathcal{A}))} S_\nu(\hat{a}), \; r(B) = \min_{\nu \in \Lambda_{\tilde{\beta}}(Sp(\mathcal{A}))} S_\nu(\hat{a}).$$

Тогда утверждение, что спектр оператора с любым коэффициентом из некоторой алгебры $\mathcal{A}$ является окружностью, эквивалентно тому, что множество $\Lambda_{\tilde{\beta}}(Sp(\mathcal{A}))$ состоит из одной меры (такие отображения $\tilde{\beta}$ называются сторого эргодическими). В силу того, что спектр оператора с коэффициентом (2) является кольцом, имеется много примеров инвариантных $C*-$подалгебр $\mathcal{A} \subset L_\infty(\mathbb{S}^1)$, для которых отображение $\tilde{\beta}$, является строго эргодическим.

Из теоремы 2 следует, что если $\mathcal{A}$ есть наименьшая $C*-$алгебра, содержащая данную функцию a_0, то на пространстве максимальных идеалов существуют по крайней мере две инвариантые эргодические меры, значит, соответсвующее отображение $\tilde{\beta}$ не является стого эргодическим. Описание этого пространства и соответствующего отображения $\tilde{\beta}$ предполагается изложить в последующих работах.

Литература

1. Антоневич, А.Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход / А.Б. Антоневич. – Минск : Университетское, 1988. – 232 с.

2. Anatolij Antonevich / Functional dierential equations I: C*-theory / Anatolij Antonevich, Andrei Lebedev // Pitman Monographs & Surveys in Pure & Appl. Math., vol. 70, Longman Scientic & Technical, Harlow, Essex, England, 1994. – 504 pp.

3. Корнфельд, И.П. Эргодическая теория / И.П. Корнфельд, Я.Г. Синай, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1980. – 384 с.

4. Parrot, S. Weighted translation operators. / S. Parrot – Dissert. Abstrs. – 1965. – V. 26. – № 5. P. 2781.2.

Белорусский государственный
университет

Поступила в редакцию 16.01.2014